SINUSLAR TEOREMASINING BA’ZI BIR ISBOTLARI VA UNING TADBIQLARI HAQIDA.

Usarov Sardor Abdinazirovich

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, katta o’qituvchi

Suyarova Gulsora Anvar qizi,

To’xtayev Javohir Otabek o’g’li,

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, 3-bosqich talabalari

Annotatsiya: Ushbu maqolada maktab geometriya kusrida Sinuslar teoremasining isbotlari, uni qo’llash usullari va aynan ushbu kursda teoremani o’qitishning dolzarbligi keltirilgan.

Kalit so’zlar: Teorema, Sinuslar teoremasi, geometriya, to’g’ri burchakli uchburchak.

Maktab geometriya kursida **sinuslar teoremasi**ni qo‘llash, asosan uchburchaklar bilan ishlashda juda foydali bo‘ladi. Sinuslar teoremasi (yoki sinuslar qonuni) uchburchaklar uchun geometriya va trigonometriya masalalarini yechishda muhim vosita hisoblanadi. Bu teorema yordamida, masalan, uchburchakning tomonlarini yoki burchaklarini bilgan holda boshqa tomon yoki burchakni aniqlash mumkin.

Sinuslar teoremasi (ko'pincha **sinus qonuni** deb ataladi) geometriya sohasiga oid muhim bir qonuniyatdir va uchburchaklarning trigonometriyasi bilan bog'liq. U, uchburchakning tomonlari va ularning qarshi burchaklari orasidagi aloqani tasvirlaydi. Sinuslar teoremasining tarixi haqida gapirganda, uni rivojlantirishda ko'plab buyuk matematiklar va ularga oid tadqiqotlar muhim rol o'ynagan. Quyida sinuslar teoremasining tarixiy rivojlanishiga nazar solamiz.

Sinuslar teoremasining dastlabki g'oyalari qadimiy yunon matematikasiga borib taqaladi. Yunonistonning mashhur matematiklari, ayniqsa Evklid va Pifagor, geometriya va trigonometriya bilan shug'ullanishgan. Ammo, sinuslar aniq tushuncha sifatida hali shakllanmagan edi.

Sinuslarning trigonometrik va geometriyadagi roli haqida so'nggi tadqiqotlar arab olimlari tomonidan amalga oshirilgan. Al-Battani (arab astronomi va matematik) sinuslarning asosiy funksiyalarini, xususan, uchburchaklarning burchaklari va tomonlari o'rtasidagi munosabatlarni tushunishga yordam bergan. U sinus funktsiyasining asoslarini ishlab chiqqan va buni o'z asarlarida qo'llagan.

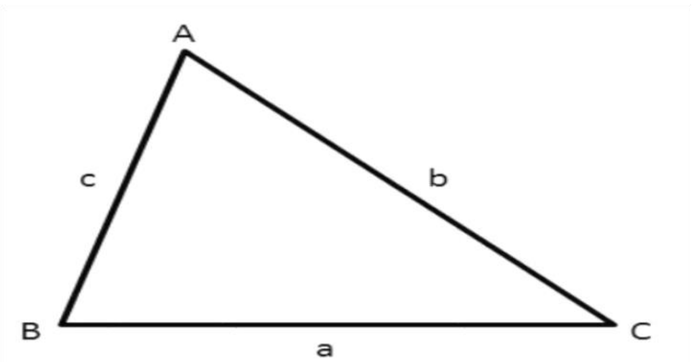
Sinuslar teoremasining hozirgi kunda biz biladigan shakli XVII va XVIII asrlarda mukammallashgan. Yevropadagi matematika va astronomiya sohasida chuqur izlanishlar orqali sinuslar teoremasi o'zining umumiy shaklini topdi.

19-asrda trigonometrik funksiyalar va ularning qo'llanilishi jiddiy rivojlandi. Karl Gustav Jakob Jacobi, Augustin-Louis Cauchy, va boshqa olimlar trigonometrik tenglamalarni kengaytirish va ular bilan ishlash usullarini yaratishdi. Bu davrda sinuslar teoremasi yanada mukammal va universal tarzda formullangan.

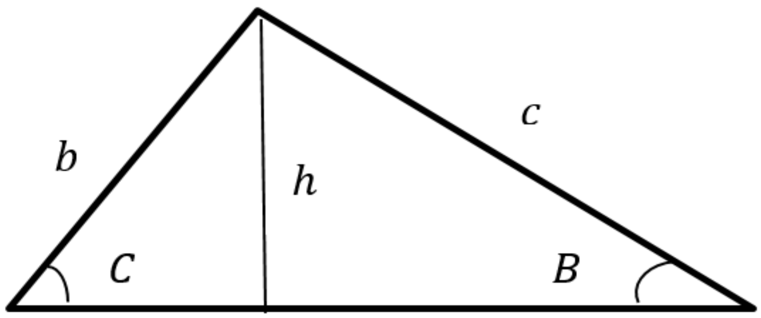
Hozirgi kunda sinuslar teoremasi geometriya, astronomiya, fizika, va muhandislik kabi ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. U uchburchaklarni tahlil qilishda, trigonometrik identifikatsiya qilishda, va hatto kosmik tadqiqotlarda muhim ahamiyatga ega.

Sinuslar teoremasining asosiy ko’rinishi quyidagicha ta’riflanadi: Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional.

$$AB = c, BC = a, CA = b \qquad \frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$



Ushbu teoremani shakllar orqali tushuntiradigan bo’lsak: Uchburchagimizga balandlik tushiramiz, natijada 2ta to’g’ri burchakli uchburchak hosil bo’ladi va trigonometriyadan foydalanib A va B uchlarining sinusini balandlikka bog’lab topamiz. Balandliklar tenglashtirilib sinuslar teoremasi keltirib chiqariladi. Ko’rinib turibdiki ushbu chizmada Sinuslar teoremasing eng sodda isbotlaridan biri keltirilgan. Maktab o’quvchilarida ushbu teoremani o’rgatishda uchburchakka balandlik tushirish orqali aniqlashdan boshlash maqsadga muvofiqdir. Chunki o’quvchilarga misol va masalalarni yechish formulalardan ko’ra shakllarga qarab aniqlash qiziqroq va samaraliroq yo’ldir.

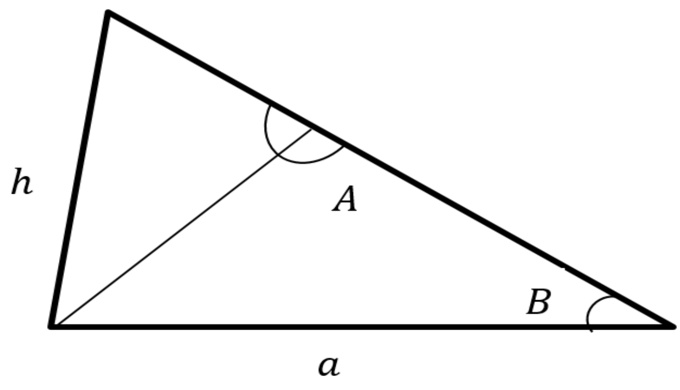


$$\sin(\mathrm{C}) = \frac{h}{b} \qquad \sin(B) = \frac{h}{c}$$

$$\sin(C) * b = h = \sin(B) * c \qquad \sin(C) * b = \sin(B) * c$$

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Sinuslar teoremasini uchburchak balandligi bo’yicha 2-isboti:



$$\sin(180 - A) = \frac{h}{b} \qquad \sin(B) = \frac{h}{a}$$

$$\sin(180 - A) * b = h = \sin(B) * a \qquad \sin(A) * b = \sin(B) * a$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

Sinuslar teoremasining o’quv adabiyotlardagi eng mashhur isbotlaridan biri bu uchburchaklar yuzlari tenglashtirish texnikasi yordamidagi isbotidir. Uchburchak yuzini burchak sinusi orqali topish formulasiga ko’ra,

$$S=\frac{1}{2}absin(C) \quad ,S=\frac{1}{2}bcsin(A), \quad S=\frac{1}{2}acsin(B) \quad (1)$$

Bu tengliklarning dastlabki ikkitasiga ko’ra,

$\frac{1}{2}absin(C)=\frac{1}{2}bcsin(A)$, demak $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{c}{\sin(C)}$

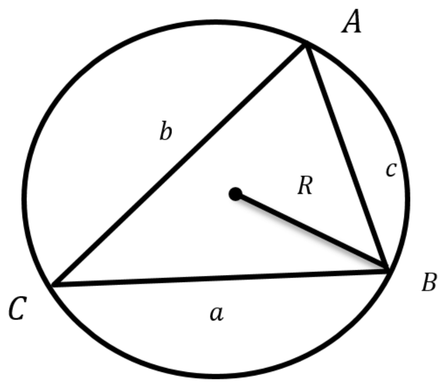
Shuningdek, (1) tengliklarning birinchi va uchinchidan

$$\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, teorema isbotlandi.

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$$

Uchburchak tomonining shu tomon qarshisidagi burchagi sinusiga nisbati uchburchakka tashqi chizilgan aylana diametriga teng, ya’ni ekanligini isbotlaymiz.



Faraz qilaylik, △ABC uchburchagi berilgan bo'lib, uning tomonlari a,b, c va burchaklari A, B, va C bo'lsin.

1. Uchburchakni doiraga joylashtirish: Uchburchakni tashqi doira ichiga joylashtiramiz. Bu doira uchburchakning barcha uch nuqtalarini (ya'ni, A, B, va C) o'z ichiga oladi va uning markazi O bo'ladi. Ushbu doira Uchburchakka tashqi chizilgan doira deb ataladi va radiusi R bilan belgilangan.

2. Doiradagi har bir burchakni sinuslar bilan bog'lash: Doiraga joylashtirilgan uchburchakning har bir burchagini sinuslar bilan bog'lash uchun quyidagi geometrik xususiyatdan foydalanamiz:

3. Burchak A uchun sinusning ifodasi: Har bir burchakning sinusini doiraning radiusi R yordamida ifodalash mumkin. Aynan:

$$\sin(A) = \frac{a}{2R}$$

Bu yerda: a — uchburchakning A burchagi qarama-qarshi tomonining uzunligi,

R — uchburchakka tashqi chizilgang doirasining radiusi.

Burchak B uchun sinusning ifodasi: Xuddi shunday, B burchagi uchun:

$$\sin(B) = \frac{b}{2R}$$

Burchak uchun sinusning ifodasi: va C burchagi uchun:

$$\sin(C) = \frac{c}{2R}$$

4. Sinuslar teoremasining umumiy formulasi: Endi, yuqoridagi tenglamalarni umumlashtirib, quyidagi ifodaga erishamiz:

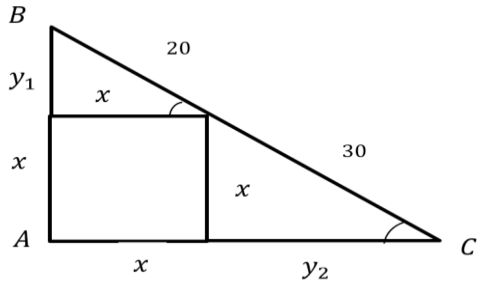
$$\frac{a}{\sin(A)} = 2R \ , \qquad \frac{b}{\sin(B)} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

Bu formulada 2R — uchburchakning tashqi doirasining diametri. Shunday qilib, sinuslar teoremasining formulasi quyidagicha chiqadi:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

Bu teorema har qanday uchburchak uchun amal qiladi.

1-misol. To’g’ri burchakli uchburchak berilgan uning gipotenuzasi 50 ga teng. To’g’ri burchakli uchburchakning ichiga kvadrat chizilgan. Kvadratning bir uchi uchburchakning gipotenuzasini 2:3nisbatda bo’ladi. Kvadratning yuzini toping?



Faraz qilaylaylik avval sinuslar teoremasidan foydalanib noma'lumlarni bir xil o'zgaruvchilarga bog'lab olamiz va tenglamani yechamiz:

$$\frac{x}{\sin(\alpha)} = \frac{y_2}{\sin(\beta)} \qquad \frac{y_1}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{y_2}{\mathrm{x}} \quad \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{y_1} \quad \frac{y_2}{\mathrm{x}} = \frac{x}{y_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_2}{\mathrm{x}} = \dfrac{x}{y_1} = \dfrac{3}{2} \\ (x+y_1)^2 + (x+y_2)^2 = 50^2 \end{cases} \underset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} y_2 = \dfrac{3}{2}x \\ y_1 = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}x\right)^2 + \left(x + \frac{2}{3}x\right)^2 = 50^2 \ , \quad x = \frac{60}{\sqrt{13}} \qquad S = x^2 = \frac{3600}{13}$$

Javob: $S = \frac{3600}{13}$

Sinuslar teoremasi isbotlarining juda ko'pchiligi shakllar yuzasi orqali isbotlangan. Ularning ko'pchiligining ko'rinishi soddaligiga qaramay, ushbu isbotlarda shakllar yuzalari xossalaridan foydalaniladi va bu xossalar Sinuslar teoremasi isbotidan ancha qulayroqdir.

2-misol. Tomonlari a=5, b=6, c=10 bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

Uchburchak yuzini uning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi orqali hisoblash formulasi

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(A)$$

va $sin(A) = \frac{a}{2R}$ formulalardan uchburchak yuzini hisoblash uchun

$$S = \frac{abc}{4R}$$

formulani va uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini hisoblash uchun $R = \frac{abc}{4S}$ formulani hosil qilamiz. Formulani hosil qilganimizdan so'ng Geron formulasi yordamida uchburchak yuzini topamiz.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+10}{2} = 11$$

$$S = \sqrt{p*(p-a)*(p-b)(p-c)} = \sqrt{11*(11-5)*(11-7)*(11-10)} \approx 16.3$$

Unda $R = \frac{abc}{4S} = \frac{5*7*10}{4*16.3} \approx 5.3$

Sinf o'quvchilarining bilim darajasi, dunyoqarashi va shunga mos holda o'tilayotgan dars mazmuni qabul qilish imkoniyati ham turlicha bo'ladi. Shularni xisobga olgan holda matematika fani o'qituvchisi har bir dars yuzasidan isbotlashga doir mavzularni turlicha usullarda isbotlash usulini ko'rsatish maqsadga muvofiq xisoblanadi. Bu isbotlash usullari soddadan murakkabga qarab ketma ket o'qitilishida har bir o'quvchi o'z bilim doirasidan kelib chiqqan holda teoremaning isbotlash usullari ichidan o'ziga ma'qulini tanlab olish imkoniyatiga ega bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. B. Haydarov, E. Sariqov, A. Qo'chqorov(2014) .Geometriya darsliki

2. Usarov, S. (2020). Maktabda matematika fani darslarini loyihalashtirish. Журнал математики и информатики, 1(1).

3. Usarov S. "Masalani yechishga o'rgatish orqali matematikanio'qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari". Educational Research in Universal Sciences ISSN: 2181-3515 VOLUME 2 | SPECIAL ISSUE 18 | 2023.

4. Usarov S. "Masalani yechishga o'rgatish orqali matematikani o'qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari". Образование наука и инновационные идеи в мире. Выпуск журнала No – 14 Часть–1 Февраль–2023.