JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

JDPI

1974

JIZZAKH STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

MATEMATIKA VA INFORMATIKA

matinfo.jspi.uz

MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

№ 4
2021

M U N D A R I J A

DISKRET VA UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR.

Rahimova Shaxnoza

JDPI matematika o'qitish metodikasi

yo'nalishi 1-bosqich magistranti

Kalit so'zlar: *o`lchovli fazo, to'plam, tasodifiy miqdor, funksiya, extimollik.*

Key words: *dimensional space, set, random quantity, function, probability.*

Ключевые слова: *размерное пространство, множество, случайная величина, функция, вероятность.*

Agar elementar hodisalar fazosi Ω diskret bo`lsa, unda aniqlangan tasodifiy miqdor ham diskret bo`ladi.

Endi diskret tasodifiy miqdorlarning eng muhim bir necha misollarini qarab chiqamiz.

1. ***Binomial taqsimot.*** Faraz qilaylik n ta bog`lanmagan tajribalr o`tkazilayotgan bo`lsin, har bir tajribada ikki hol bo`lishi mumkin, qanday A hodisasi p ehtimollik bilan ro`y beradi, $q = 1 - p$ ehtimol bilan ro`y bermaydi.

$\xi(\omega)$ bilan n ta bog`lanmagan tajribalarda hodisa ro`y berishlar sonini belgilaymiz $\{\omega : \xi(\omega) = m\}$hodisasining ehtimoli bizga ma`lumki

$$P_n(m) = P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} (m = 1,2\ldots) \qquad (1)$$

Bunday tasodify miqdorlarga binomial qonun bo`yicha taqsimlangan taodifiy miqdor deyiladi.

2. Geometrik taqsimot. Faraz qilaylik bog`lanmagan tajribalr o`tkazilayotgan bo`lsin, bu tag`ribalarning har birda qandaydir A hodisasi ro`y bersin *p* ehtimol bilan yoki ro`y bermasin *q* ehtimol bilan $q = 1 - p$. Tajribalar toki A hodisasi birinchi marta ro`y berguncha o`tkazilsin. U holda tajribalar sonini $\xi(\omega)$ deb, uning taqsimotini topamiz . Bu holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \left\{ A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \ldots, \underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-1}A, \ldots \right\}$$

bo`ladi.

Agar $\xi(\omega) = n$ bo`lsa, tajribaning bog`lanmaganligiga asosan

$$P\left\{ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-1}A, \ldots \right\} = q^{n-1}p$$

bo`ladi.

Shunday qilib

$$P\{\xi(\omega) = n\} = q^n p \quad (n = 0,1,2...) \qquad (2)$$

$p, qp, q^2 p, ..., q^n p, ...$ ketma-ketlik geometrik progressiyani tashkil qilganligi uchun (2) ehtimollarga ehtimollikning ***geometrik taqsimot*** qonuni deyiladi.

3.Gipergeometrik taqsimot. Faraz qilaylik idishda *N* ta shar bo`lib, undan *n* tasi oq, *N-n* tasi qora bo`lsin. Tasodifiy ravishda *k* ta shar olindi. ξ-olingan k ta sharlar orasida oq sharlar soni bo`lsin u holda bizga ma`lumki

$$P\{\xi = r\} = \frac{C_n^r C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k} \qquad (0 \le r \le \min(n, k)) \qquad (3)$$

(3) ehtimollarga ehtimollikning ***gipergeometrik taqsimot*** qonuni deyiladi.

4. Puasson taqsimoti. Agar ξ tasodifiy 0,1,2,3,… qiymatlarni

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

ehtimollar bilan qabul qilsa $(\lambda > 0)$, unga λ parametr bilan *Puasson taqsimotiga ega* deyiladi.

5. ξ tasoifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_N, ...$ qiymatlarni $P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}$, $k = \overline{1, N}$ ehtimollar bilan qabul qilsa, bunday tasoifiy miqdorga ***tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor*** deyiladi.

Agar Ω sanoqsiz bo`lsa, unda aniqlangan har qanday tasodifiy miqdor diskret emas, uzluksiz bo`ladi.

Faraz qilaylik $F(x)$ ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo`lsin.

Ta`rif. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du \qquad (4)$$

ko`rinishda yozish mumkin bo`lsa, bu tasodifiy miqdorni ***absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor*** deyiladi.

$p(u)$ funksiya esa ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (zichlik taqsimoti) deyiladi.

Uzluksiz nuqtalarida (4) dan

$$F'(x) = p(x) \qquad (5)$$

kelib chiqadi.

Zichlik funksiyasining xossalari bilan tanishib chiqamiz.

1°. Zichlik funksiya manfiy emas, ya`ni $p(x) \geq 0$.

Isboti. Taqsimot funksiya kamaymaydigan funksiya bo`lganligidan, uning hosilasi deyarli barcha nuqtalarda musbat bo`ladi.

2°. Har qanday $x_1 < x_2$ uchun

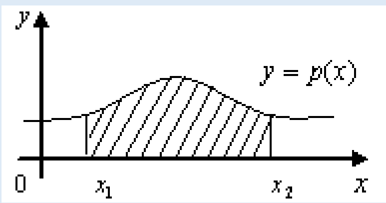
$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

Isboti. Taqsimot funksiyaning xossasi va (4) munosabatga asosan, $x_1 < x_2$ bo`lganligi uchun:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

$P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$ ehtimollik $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ va $y = p(x)$ chiziqlari bilan chegaralangan figuraning yuziga teng bo`ladi.



Umumiy holda har qanday $B \in B(R)$ uchun $P\{\xi \in B\} = \int_B p(x)dx$ bo`ladi.

3°. Zichlik funksiyasidan $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo`yicha olingan integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Isboti. (4) va taqsimot funksiyaning xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

1°, 3° xossalarni qanoatlantiruvchi har qanday $p(x)$ funksiya qandaydir tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo\`ladi.

Absalyut uzluksiz taqsimot funksiyalar deb $p(x)$ zichlik taqsimoti ega bo\`lgan tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyalarga aytiladi. Bunday taqsimot funksiyalar (4) ko\`rinishda tasvirlanadi. Uzluksiz taqsimot funksiyalar orasida zichlik taqsimotiga ega bo\`lmaganlari ham mavjud. Bunday funksiyaga quyidagicha aniqlangan Kontor funksiyasi misol bo\`ladi. $x \le 0$ bo\`lsa $F(x) = 0$, $x \ge 1$ bo\`lsa $F(x) = 1$ va

$$F(x) = \begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{3} \quad bo'lsa \quad \frac{1}{2}F(3x) \\ \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3} \quad bo'lsa \quad \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \le x \le 1 \quad bo'lsa \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x \end{cases}$$

Zichlik taqsimotiga ega bo\`lmagan uzluksiz taqsimot fuksiyaga singulyar deyiladi. A. Lebegga tegishli bo\`lgan quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema: Har qanday $F(x)$ taqsimot fuksiya yagona usul bilan $F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x), \quad (a_i \ge 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1)$ ko\`rinishda tasvirlanishi mumkin, bu yerda $F_1(x)-$diskret taqsimot funksiya $F_2(x)-$absalyut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)-$singulyar taqsimot funksiya.

Endi ba\`zi muhim absolyut uzluksiz taqsimotlarni qarab chiqamiz.

Tekis taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} x \in (a,b), \quad bo'lsa \quad \frac{1}{b-a} \\ x \notin [a,b], \quad bo'lsa \quad 0 \end{cases}$$

ko`rinishida bo`lsa, ξ tasodifiy miqdor $[a,b]$ kesmada tekis taqsimotga ega deyiladi.

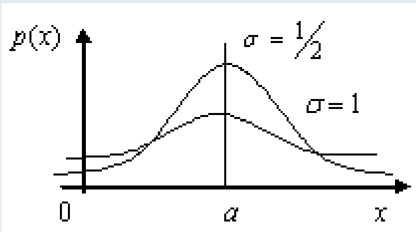
<u>Normal taqsimot</u>. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko`rinishda bo`lsa, u $N(a,\sigma)$ normal taqsimotga ega deyiladi.

Haqiqatdan ham *p(x)* zichlik funksiyadir, chunki $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1.$

Bunga $\frac{x-a}{\sigma}=t$ almashtirish va matematik analiz kursidagi Puasson integrali orqali ishonch hosil qilish mumkin $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{2\pi}$.



$N(a,\sigma)$ normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigi $x=a$ chiziqga nisbatan simmetrik bo`ladi va $\sigma$ ning turli qiymatlarida quyidagicha bo`ladi. ξ $N(0,1)$ normal taqsimotga ega bo`lgan tasodifiy miqdor bo`lsin, bu holda ξ standart normal taqsimotga ega deyiladi. U holda ξ ning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

zichlik funksiyasi esa

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ko`rinishida bo`ladi. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

**<u>Ko`rsatkichli taqsimot.</u>** $\xi$ tasodifiy miqdor $\nu$ parametr bilan ko`rsatkichli (eksponensial) taqsimotga ega deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi quyiadgi ko`rinishda bo`lsa,

$$F(x)=\begin{cases} x>0 \ \ bo'lsa & 1-e^{-\nu x} \\ x\le 0 \ \ bo'lsa & 0 \end{cases}.$$

Biz bundan keyin ξ tasodifiy miqdor a,σ parametrli normal taqsimotga ega bo`lsa, $\xi \sim N(a,\sigma)$ ko`rinishda yozamiz.

Bunday tasodifiy miqdorning zichlik taqsimoti

$$p(x)=\begin{cases} x>0 \ \ bo'lsa & \nu e^{-\nu x} \\ x\le 0 \ \ bo'lsa & 0 \end{cases}$$

ko`rinishda bo`ladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik taqsimoti $p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{(x-\mu)^2+a^2} \quad (a>0)$ bo`lsa, u Koshi qonuni bilan taqsimlangan deyiladi.

Endi normal taqsimot orqali aniqlanadigan ayrim taqsimotlarni qaraymiz.

χ^2-taqsimot. $\xi_i \sim N(a,\sigma)$ va bog`lanmagan tasodifiy miqdorlar bo`lsinlar ($i=\overline{1,\nu}$). $\chi_\nu^2=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_\nu^2$ tasoifiy miqdorlarni aniqlaymiz. χ_ν^2 tasodifiy miqdorning taqsimotiga ν erkinlik (ozodlik) darajali χ^2 taqsimoti deyladi.

ν erkinlik darajali χ^2 taqsimotning zichlik funksiya $x>0$ uchun $p_\nu(x)=k_\nu e^{-\frac{x^2}{2}}x^{\frac{\nu}{2}-1}$ ko`rinishiga ega, bu yerda $k_\nu$ ko`paytuvchi $\int_{-\infty}^{\infty}p_\nu(x)dx=1$ shartni qanoatlantiradi.

Styudent taqsimoti. $\xi_i \sim N(a,\sigma)$, $i=\overline{1,\nu}$ va ξ_i lar bog`lanmagan tasodifiy miqdorlar. U holda

$$t_t=\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2}}$$

tasodifiy miqdor ν erkinlik darajali Styudent taqsimotga ega deyiladi.

Styudent taqsimotining zichlik funksiyasi

$$P_{t_\nu}(x)=b_\nu\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

ko`rinishda bo`ladi.

Fisher taqsimoti (F-taqsimot). $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n_1}, \xi_{n_1+1}, ..., \xi_{n_1+n_2}$ -bog`lanmagan normal tasodifiy miqdorlar bo`lsinlar: $\xi_i \sim N(0,\sigma)$, $i = \overline{1, n_1+n_2}$. U holda

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n+n_2}\xi_i^2}$$

tasodifiy miqdor n_1 va n_2 erkinlik darajali Fisher taqsimotiga ega bo`ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., УРСС.1999.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., УРСС. 2003.
3. Зубков А.М. Севостьянов Б.А. Чистяков В. П. Сборник задач по вероятностей М., “Наука”. 1989.
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей М., “Наука”. 2003
5. Ширяев А.Н. Вероятность-1,2. МЦНМО. 2004.
6. Sirojiddinov S.X. Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. 1980.
7. Formanov Sh.Q. Ehtimollar nazariyasi. Toshkent. 2014.