MARKOV ZANJIRINING AYRIM MASALALARGA TATBIQLARI

Imomaliyev Jamshidjon Nozimjon o'g'li

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy universiteti.

1-bosqich magistranti

jamshidjon.in777@gmail.com

Annotatsiya. Markov zanjirlarini hayotda juda ko'p jarayonlarni baholashda, bashorat qilishda muhim o'rni bor. Zamonaviy sohalarda keng qo'llanilgani bois, uni chuqurroq o'rganish va ayrim hayotiy masalalarga tatbiqlarini o'rganishimiz kerak. Zamonaviy veb-texnologiyalar, adabiy matnlarni tahlil qilish yoki futbol jamoasining o'yin taktikasini ishlab chiqish kabi masalalarda uning ahamiyati beqiyos. Ushbu maqolada o'yinning natijasini va ob-havoni bashorat qilish masalalari ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: Markov jarayoni, o'tish matrisasi, diskret vaqtli Markov zanjiri, Markov xossasi, holatlar fazosi, Chepmen-kolmogorov tenglamasi, tutashgan holat, yutib qoluvchi holat, davrli holat, qaytuvchan holat, vaqtinchalik holat.

Markov zanjirlari tasodifiy jarayonlarni ko'p o'rgangan va ushbu sohaning rivojlanishiga katta hissa qo'shgan taniqli rus matematigi Andrey Andreevich Markov sharafiga nomlangan. Markov zanjirlari nima ekanligini bilmaganlar, bu juda murakkab va tushunish deyarli mumkin bo'lmagan narsa ekanligini his qilishlari mumkin.Yo'q, buning aksi. Markov zanjiri tasodifiy hodisalar ketma-ketligining eng oddiy holatlaridan biridir. Ammo, soddaligiga qaramay, u juda murakkab hodisalarni tasvirlashda ham foydali bo'lishi mumkin. Markov zanjiri tasodifiy hodisalar ketma-ketligi bo'lib, unda har bir hodisaning ehtimoli faqat oldingisiga bog'liq, lekin oldingi voqealarga bog'liq emas.

Asosiy ta'riflar va Chepmen-Kolmogorov tenglamalari. $(\Omega, \Im, P)$ ehtimollar fazosini qaraymiz. A va B hodisalar berilgan bo'lib, $P(B) > 0$ bo'lsin. U holda A hodisaning B sharti ostidagi ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Bizga quyidagi xossa muhim:

$$P(AB/C)=P(A/BC)\cdot P(B/C)$$

Bizga X tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin va uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo'lsin.

$$X: X_1, X_2, ...X_n, ...$$

Quyidagi tengliklar o'rinli:

1) $\sum_k P(X=x_k/B)=1$

2) $P(B)=\sum_k P(B/X=x_k)\cdot P(X=x_k)$

3) $\sum_k P(X=x_k, A/B)=P(A/B)$

Ta'rif. Markov zanjiri bu har bir X_n tasodifiy miqdor diskret S to'plamida (odatda $S=N$) qiymat oladigan diskret vaqtli staxostik jarayondir va quyidagi o'rinli:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, ..., X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

bu yerda $\forall n\geq 0, j, i, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$

Agar $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=p_{ij}$ ehtimolliklar n ga bog'liq bo'lmasa, u holda X tasodifiy miqdor vaqtga nisbatan bir jinsli Markov zanjiri bo'ladi.

Quyidagi ayrim terminlar bilan tanishamiz:

a) X_n tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari zanjirning ***holatlari*** deb ataladi va S - ***holatlar fazosi;***

b) Agar S chekli bo'lsa, chekli holat uchun Markov zanjiri deyiladi.

c) $P=(p_{ij}), i, j\in S$ Markov zanjiri uchun ***o'tish matrisasi*** deb nomlanadi.

O'tish matrisasining xossalarini keltirib o'tamiz:

a) $p_{ij}\geq 0, \forall i, j\in S$

b) $\sum_{j\in S} p_{ij}=1, \forall i\in S$

O'tish matrisasi yordamida vaqtga nisbatan bir jinsli Markov zanjirini doimo ifodalash mumkin.

Misol 1. (musiqa festivali haqida)

Musiqa festivalida talabaning quyidagi to’rt xil holati berilgan bo’lsin $S=\{"diskotekada","konsertda","barda","uyda"\}$. Tasavvur qilaylikki, quyidagi o’tish matrisasi uning holatini o’zgarishini aks ettiradi.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Misol 2. (oddiy simmetrik tasodifiy “daydish”)

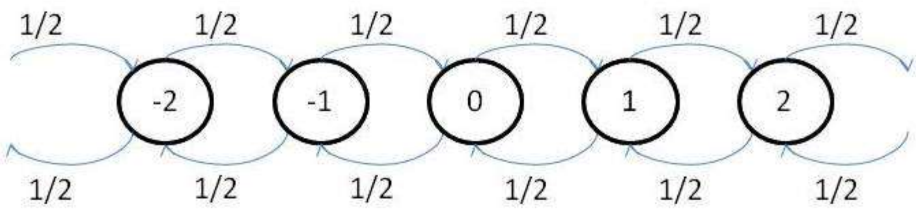
Bizga $(X_n, n\geq 0)$ bog’liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $P(X_n=+1)=P(X_n=-1)=\frac{1}{2}$ berilgan bo’lsin. $(S_n, n\geq 0)$ uchun ta’rifga ko’ra, $S_0=0, S_n=X_1+...+X_n, n\geq 0$ ko’rinishida aniqlash mumkin va $(S_n, n\in N)$ Markov zanjirining holatlar fazosi $S=Z$ bo’ladi. Darhaqiqat:

$$P(S_{n+1}=j|S_n=i, S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0)=P(X_{n+1}=j-i|S_n=i, S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0)=P(X_{n+1}=j-i)$$

farazga ko’ra X_n erkli o’zgaruvchilar. Zanjir vaqtga nisbatan bir xil taqsimlangan va

$$P(X_{n+1}=j-i)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ,|j-i|=1 \\ 0,|j-i|\neq 1 \end{cases}$$

ehtimollik n ga bog’liq emas. Zanjirni quyidagi grafik yordamida ham ko’rishimiz mumkin:



X Markov zanjirining n vaqtdagi taqsimoti quyidagicha ifodalanadi:

$$\pi_i^{(n)}=P(X_n=i), i\in S$$

Biz bilamizki, barcha $i \in S$ lar uchun $\pi_i^{(n)} \geq 0$ va $\sum_{i \in S} \pi_i^{(n)} = 1$.

Markov zanjirining boshlang'ich taqsimoti quyidagicha ifodalanadi:

$$\pi_i^{(0)} = P(X_0 = i), i \in S$$

Zanjirni to'liq harakterlash uchun $P = (p_{ij}), i, j \in S$ o'tish matrisasi bilan berilishi kerak. Markov xossasidan bir qancha foydalanish orqali biz quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned} &P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ &= p_{i_{n-1}, i_n} \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = ... = p_{i_{n-1}, i_n} \cdot p_{i_{n-2}, i_{n-1}} \cdot ... \cdot p_{i_1, i_2} \cdot p_{i_0, i_1} \cdot \pi_{i_0}^{(0)} \end{aligned}$$

Demak, P va $\pi^{(0)}$ ni bilish yuqoridagi barcha ehtimollarni hisoblash imkonini beradi. Bizga zanjirning n-tartibli o'tish ehtimoli berilgan bo'lsin.

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i), \quad n, m \geq 0, \quad i, j \in S$$

Quyidagi o'tish ehtimolini hisoblaylik:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= P(X_{n+2} = j | X_n = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k | X_n = i) = \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = k, X_m = i) \cdot P(X_{n+1} = k | X_n = i) = \\ &= P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = k) \cdot P(X_{n+1} = k | X_n = i) = \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot p_{kj} \end{aligned}$$

bu yerda oxirgi tenglikda Markov xossasidan foydalanildi. Xuddi shunga o'xshab m va n qiymatlar uchun ***Chepmen-Kolmogorov tenglamasi***ni olamiz:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)}, \quad n, m \geq 0, \quad i, j \in S$$

bunda
$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & agar \ i = j \\ 0, & aks \quad holda \end{cases}$$

O'tish matrisasi P ga ko'ra yuqoridagi tenglamadan quyidagini olish mumkin:

$$(P^{n+m})_{ij} = (P^n \cdot P^m)_{ij} = \sum_{k \in S} (P^n)_{ik} \cdot (P^m)_{kj}$$

bu yerda $P^0 = I$ birlik matrisa.

Markov zanjiri holatlarining klassifikatsiyasi.

* Agar $p_{ij}^{(n)} > 0$, $n \geq 0$ bo'lsa, u holda j chi holat i chi holatdan keyin keladi deyiladi va $j \mapsto i$ simvol bilan belgilanadi.

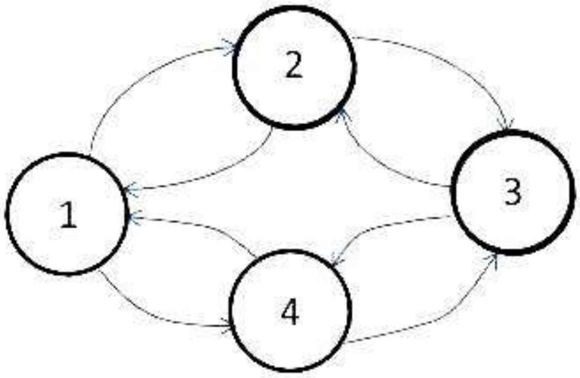
* Agar $j \mapsto i$ va $i \mapsto j$ bo'lsa, i va j holatlar tutashgan holatlar deyiladi va $i \leftrightarrow j$ kabi belgilanadi.

* Agar $p_{ii} = 1$ bo'lsa, ***yutib qoluvchi holat*** deyiladi.

* Agar $p_{ii}^{(n)} > 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n larning eng katta umumiy bo'luvchisi $d > 1$ bo'lsa, d ***davrli holat*** deyiladi. Agar uning davri 1 ga teng bo'lsa, u holda u davriy emas deyiladi.

Bizga ma'lumki, $p_{ii}^{(n)} = P(X_n = i | X_0 = i)$ ehtimollik qadamdan keyin i chi holatdan boshlanib, i chi holatga qaytib kelish ehtimolini bildiradi. Buni quyidagicha yozib olamiz: $f_i = P(X \text{ qachondir } i | X_0 = i \text{ } ga\ qaytadi)$.

Misol 3. Markov zanjiri uchun quyidagi o'tish grafigi berilgan:



Bundan ko'rinadiki, davri 2 bo'lgan Markov zanjiri ekan.

Ta'rif. Agar $f_i = 1$ bo'lsa, i holat ***qaytuvchi***, agar $f_i < 1$ bo'lsa, ***vaqtinchalik*** holat deyiladi.

Ma'lum bir sinfdagi barcha holatlar qaytuvchan yoki vaqtinchalik ekanligini ko'rsatish mumkin. 1-misolda "konsertda", "diskotekada", "barda" holatlari vaqtinchalik, "uyga qaytish" esa qaytuvchan, chunki u aniq takrorlanadi. [1.2]-misol juda ko'plab holatlarni o'z ichiga oladi va bu uchun quyidagi xossadan foydalanishni talab qiladi:

- i chi holat qaytuvchan bo'ladi, faqatma faqat agar $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = \propto$ bo'lsa.
- i chi holat vaqtinchalik bo'ladi, faqatma faqat agar $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} < \propto$ bo'lsa.

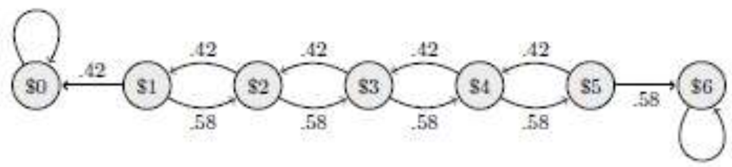
Endi Markov zanjirining tatbiqlariga doir masalalar bilan tanishamiz.

Misol 4.(Qimor o'yini)

O'yinchining qimor o'yinida 1$ yutib olish ehtimoli 0.58 va 1$ yutqazish ehtimoli 0.42 bo'lsin. Quyidagi shartlar talab qilinsin:

- O'yinchi 1$ dan 5$ gacha mablag'i bo'lsa o'yinni davom ettira oladi.
- Quyidagi ikki holatdan biri kuzatilsa, o'yin tugaydi: o'yinchi 6$ ga ega bo'ldi yoki uning mablag'i 0$ bo'ldi(yutqazdi).
- O'yinchi har bir partiyada 1$ tikadi. Agar g'alaba qozonsa, 1$ ishlab oladi. Agar yutqazsa, 1$ pulidan ayriladi.

Chekli Markov zanjiri yordamida o'yinchining yutqazish muammosini modellashtirish mumkin. Biz 6$ yutib olishi yoki bor pulini boy berish ehtimolini topa olamiz.



Yuqoridagi rasmda masalaga mos Markov zanjiri tasvirlangan. O'yin uchun mos o'tish matrisasini tuzamiz:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.58 & 0 & 0.42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Agar o'yinchi 1$ bilan o'yinni boshlasa, uning boshlang'ich taqsimot matrisasi quyidagicha bo'ladi:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

5 partiyadan keyin, $A_5 = A_0 \cdot P^5 = \begin{bmatrix} 0.57 & 0 & 0.17 & 0 & 0.19 & 0 & 0.65 \end{bmatrix}^T$

50 partiyadan keyin esa, $A_{50} \approx A_0 \cdot P^{50} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32 \end{bmatrix}^T$

Xuddi shunga o'xshash, o'yinchi o'yinni 5$ bilan boshlasa, ehtimolliklarni hisoblash mumkin:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

5 partiyadan keyin, $A_5 = A_0 \cdot P^5 = \begin{bmatrix} 0.013 & 0 & 0.072 & 0 & 0.125 & 0 & 0.79 \end{bmatrix}^T$

55 partiyadan keyin esa, $A_{55} \approx A_0 \cdot P^{50} = \begin{bmatrix} 0.064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.936 \end{bmatrix}^T$.

Bu shuni anglatadiki, o'yinning 55 partiyasidan keyin hamma pulni yutqazish ehtimoli 0.064% va g'alaba qozonish ehtimoli 0.936%. Natijalarni solishtirsak, o'yinchi 1 dollarga nisbatan 5 dollar bilan o'yinni boshlasa, o'yinda 6 dollarlik yutuqqa ega bo'lish ehtimoli sezilarli darajada yuqori ekan.

Misol 5. (ob-havoni bashorat qilish)

Endigi misol Markov zanjiri juda ko'p qo'llaniladigan ob-havoni bashorat qilish masalasi haqida. Noyabr oyidagi ob-havo quyidagi holatlardan biri bo'lishi mumkin: "quyoshli", "qorli" yoki "bulutli". Markov zanjiri xossasiga asosan, ertagalik ob-havo qanday bo'lishi bugungi ob-havoga bog'liq. Quyidagi o'tish matrisasi noyabr oyi ob-havo ma'lumotlarini 30 marta kuzatuv natijasi yordamida tuzilgan:

$$P = \begin{array}{r} \\ bulutli \\ quyoshli \\ qorli \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} bulutli & quyoshli & qorli \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.5 \\ 0.21 & 0.44 & 0.1 \\ 0.21 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix} \end{array}$$

12-noyabrda havo bulutli bo'ldi. Buni quyidagi ustun vektor ko'rinishida yoza olamiz:

$$x_0 = \begin{array}{r} bulutli \\ quyoshli \\ qorli \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15-noyabrdagi, ya'ni 3 kundan keyingi ob-havoning ehtimolini hisoblaymiz:

$$x_3 = P^3 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.5 \\ 0.21 & 0.44 & 0.1 \\ 0.21 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.30 \\ 0.23 \end{bmatrix} \begin{array}{l} bulutli \\ quyoshli \\ qorli \end{array}$$

Bundan ko'rinadiki, 15-noyabr kuni havo bulutli bo'lish ehtimoli yuqori ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Olivier L´eveque. “Lecture notes on Markov chains”. National University of Ireland, Maynooth, August 2-5, 2011.

2. Sh.Q.Farmonov. Ehtimolliklar nazariyasi. Darslik. Toshkent, “Universitet”, 2014